EAMAC Ecole Africaine de la Météorologie	Concours EAMAC 2023	Cycle : INGÉNIEUR

Epreuve de : Mathématiques

Durée : 04 heures

Exercice 1 : (5 pts)

Soit Δ_n le déterminant de la matrice de taille n suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une relation de récurrence entre Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n pour tout $n \geq 1$.
2. En déduire la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.

Exercice 2 : (5 pts)

Pour $x \in I = [0,1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n(1-x)$.

1. Étudier la convergence simple sur I de la série de terme général u_n. On notera dans la suite S la somme de la série.
2. Étudier la convergence normale sur I de la série de terme général u_n.
3. On suppose dans cette question que $a = 0$. Calculer S sur $[0,1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. On suppose $a > 0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

Exercice 3 : (5 pts)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique, soit f l'endomorphisme de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer A^2 en fonction de A. En déduire pour tout $n \geq 1$ une expression de A^n en fonction de A. Trouver le polynôme minimal de A.
3. Calculer $\dim(\ker A)$ et en déduire que A est diagonalisable. Trouver le polynôme caractéristique de A.
4. Trouver une base de vecteurs propres.

Exercice 4 : (5 pts)

Étudier la nature des séries numériques dont les termes généraux sont :

1. $u_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}\left((2n+1)!\right)^2}{(n!)\left((3n-1)!\right)}, n \in \mathbb{N}^\star$
2. $v_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}, n \in \mathbb{N}^\star$
3. $w_n = \left(a + \frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}, n \in \mathbb{N}^\star$ (a un réel strictement positif).

Correction.

Exercice 1 : (5 pts)

Soit Δ_n le déterminant de la matrice de taille n suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminons une relation de récurrence entre Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n pour tout $n \geq 1$.
   On développe d'abord suivant la 1ère colonne puis on développe le second déterminant suivant la 1ère ligne :
   $$\Delta_{n+2} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n.$$
2. En déduisons la valeur de Δ_n pour tout $n \geq 1$.
   La relation de récurrence $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$ a pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   Cette équation caractéristique admet comme solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$.
   Par suite il existe λ_1, λ_2 deux réels tels que $\Delta_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n = \lambda_1 + \lambda_2 r_2^n$.
   On détermine les réels λ_1, λ_2 à partir de Δ_1 et Δ_2.
   $$\begin{cases} \Delta_1 = 3 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2.$$
   Conclusion :
   Pour tout $n \geq 1$,
   $$\Delta_n = 2^{n+1} - 1.$$

Exercice 2 : (5 pts)

Pour $x \in I = [0,1]$, $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n (1-x)$.

1. Étudions la convergence simple sur I de la série de terme général u_n. On notera dans la suite S la somme de la série.
   Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors $u_n(x) = 0$ et donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = 0$.
   Si $x \in]0,1[$ alors $u_n(x) > 0$ pour tout $n \geq 1$ et
   $$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)^a x^{n+1}(1-x)}{n^a x^n (1-x)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a x \xrightarrow[n \to +\infty]{} x < 1.$$
   Par la règle de d'Alembert, on conclut que la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ converge.
   Conclusion :
   La série de terme général u_n converge simplement sur I.
2. Étudions la convergence normale sur I de la série de terme général u_n.
   Sur I $u_n'(x) = n^{a+1}x^{n-1}(1-x) - n^a x^n = n^a x^{n-1}(n - (n+1)x)$. Donc la fonction u_n admet un maximum au point $x = \frac{n}{n+1}$ égal à $u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = n^a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$.
   Puisque la fonction u_n est positive sur I, on en déduit que
   $$\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in I} u_n = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^a}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$
   On a

$$\|u_n\|_\infty \sim \frac{e^{-1}}{n^{1-a}}.$$

Ainsi par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\|u_n\|_\infty$ converge si et seulement si $1-a>1$ soit $a<0$.

Conclusion :

La série de terme général u_n converge normalement sur I si et seulement si $a<0$.

3. On suppose dans cette question que $a=0$. Calculons S sur $[0,1[$. En déduisons que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

   Si $a=0$, $u_n(x)=x^n(1-x)=x^n-x^{n+1}$.

   Par suite sur $[0,1[$, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n-x^{n+1})=\lim\limits_{n\to+\infty}(x-x^n)=x$.

   Chaque fonction u_n étant continue sur $[0,1]$, si la série de terme général u_n convergeait uniformément sur $[0,1]$ alors la somme S de la série serait continue sur $[0,1]$. Ce qui n'est pas le cas car
   $$\lim_{x\to1}S(x)=1\neq0=S(0).$$
   On conclut donc que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

4. On suppose $a>0$. Démontrons que la convergence n'est pas uniforme sur I.

Exercice 3 : (5 pts)

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique, soit f l'endomorphisme de matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\\1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}.$$

1. Quel est le rang de A ?

   Les vecteurs colonnes de A sont liés deux à deux donc $\operatorname{rang}A=1$.

2. Calculons A^2 en fonction de A. En déduisons pour tout $n\geq1$ une expression de A^n en fonction de A. Trouvons le polynôme minimal de A.

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\\1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\\1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-2+3-4&2(1-2+3-4)&3(1-2+3-4)&4(1-2+3-4)\\-1+2-3+4&-2(1-2+3-4)&-3(1-2+3-4)&-4(1-2+3-4)\\1-2+3-4&2(1-2+3-4)&3(1-2+3-4)&4(1-2+3-4)\\-1+2-3+4&-2(1-2+3-4)&-3(1-2+3-4)&-4(1-2+3-4)\end{pmatrix}$$
$$=(1-2+3-4)\begin{pmatrix}1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\\1&2&3&4\\-1&-2&-3&-4\end{pmatrix}$$
$$=-2A.$$

On a

$$A^2=-2A$$
$$A^3=(-2A)A=(-2)^2A$$
$$A^4=(-2)^2A^2=(-2)^3A$$
$$A^5=(-2)^3A^2=(-2)^4A$$

En poursuivant ce processus, on obtient $A^n=(-2)^{n-1}A$. Montrons ce résultat par récurrence.

- C'est vrai pour $n=1$.

- Supposons que $A^n = (-2)^{n-1}A$. On a $A^{n+1} = A^nA = (-2)^{n-1}A^2 = (-2)^nA$.

Ce qui achève la démonstration.

Le polynôme minimal P_m est le plus petit polynôme annulateur de A. De $A^2 = -2A$, il résulte que $P_m(X) = X(X+2)$.

3. Calculons $\dim(\ker A)$ et en déduisons que A est diagonalisable. Trouvons le polynôme caractéristique de A.
D'après le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^4 = \dim(\ker A) + \operatorname{rang} A$ donc $\dim(\ker A) = 4 - 1 = 3$.
Par suite $\dim E_0 = \dim(\ker A) = 3$.
De $\operatorname{rang} A = 1$ et $E_2 \neq \ker A$ alors $\dim E_2 = 1$. Par conséquent A est diagonalisable puisque $\mathbb{R}^4 = E_0 \oplus E_2$.
Le polynôme caractéristique de A est donné par :
$$\chi_A(X) = X^3(X+2).$$
4. Trouvons une base de vecteurs propres.

La famille $\{2e_1 - e_2, 3e_1 - e_3, 4e_1 - e_4\}$ est une base de $E_0 = \ker A$. Soit maintenant $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.
$$Av = -2v \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 2x \\ x + 2y + 3z + 4t = -2y \\ x + 2y + 3z + 4t = 2z \\ x + 2y + 3z + 4t = -2t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = -y = z = -t$$
$$\Leftrightarrow E_2 = \ker(A - 2I_4) = \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$
Une base de vecteurs propres est
$$B = \left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Exercice 4 : (5 pts)

Étudions la nature des séries numériques dont les termes généraux sont :

1. $u_n = \frac{3^{\frac{n}{2}}\left((2n+1)!\right)^2}{(n!)\left((3n-1)!\right)}, n \in \mathbb{N}^\star$.
On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{\frac{n+1}{2}}\left((2n+3)!\right)^2}{\left((n+1)!\right)\left((3n+2)!\right)} \frac{(n!)\left((3n-1)!\right)}{3^{\frac{n}{2}}\left((2n+1)!\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{3}(2n+2)^2(2n+3)^2}{(n+1)(3n)(3n+1)(3n+2)}$$
$$= \frac{4\sqrt{3}(n+1)(2n+3)^2}{3n(3n+1)(3n+2)}$$

Par suite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{4\sqrt{3}(n+1)(2n+3)^2}{3n(3n+1)(3n+2)}=\frac{16\sqrt{3}}{27}>1$. Par la règle de d'Alembert, la série de terme général u_n diverge (grossièrement).

2. $v_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}, n\in\mathbb{N}^\star$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2 4^{n+1}}\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}=\frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2}=\frac{1}{2}\frac{2n+1}{n+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$
$$=1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par la règle de Raabe-Duhamel, la série de terme général v_n est divergente car $\frac{1}{2}<1$.

3. $w_n=\left(a+\frac{1}{n^2}\right)^{-n^2}, n\in\mathbb{N}^\star$ (a un réel strictement positif).

$$\sqrt[n]{w_n}=\left(a+\frac{1}{n^2}\right)^{-n}=e^{-n\ln\left(a+\frac{1}{n^2}\right)}=e^{-n\left(\ln a+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e^{-n\ln a+o(1)}.$$
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt[n]{w_n}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}e^{-n\ln a+o(1)}=\begin{cases}+\infty & si\ a<1\\ 1 & si\ a=1.\\ 0 & si\ a>1\end{cases}$$

Par la règle de Cauchy, la série de terme général w_n converge pour $a>1$ et diverge pour $a<1$. Cette règle ne permet pas de conclure pour $a=1$. Dans la suite on suppose $a=1$. On a

$w_n=e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=e^{-n^2\left(\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{-1+o(1)}\longrightarrow e^{-1}\neq 0\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{+\infty}w_n$ diverge grossièment.